

也谈Rossby长波理论及其“悖论”

陶祖钰¹ 费海燕²

(1 北京大学物理学院, 北京 100871; 2 中国气象局气象干部培训学院, 北京 100081)

摘要: 鉴于罗斯贝长波理论无辐散假定与物理学波动概念之间的矛盾, 文章讨论了牵连涡度和相对涡度之间的相互转换实际上都需要通过散度才能实现。从地转适应理论的角度看, 罗斯贝无辐散的假定实际上是假定地转适应过程无限快, 和物理学的波动概念并不抵触。最后从流线和轨迹的区别分析了长波中散度的分布特征及其与长波移速在物理上的关联。

关键词: 罗斯贝长波, 地转适应, 散度, 涡度

DOI: 10.3969/j.issn.2095-1973.2017.05.004

Discussion on the Issue of Rossby Waves Theory and Its “Paradox”

Tao Zuyu¹, Fei Haiyan²

(1 Department of Science of Atmosphere and Ocean, School of Physics, Peking University, Beijing 100871

2 China Meteorological Administration Training Centre, Beijing 100081)

Abstract: Since the contradiction between the nondivergent assumption of Rossby waves theory and the concept of physics fluctuation, this paper discusses that the mutual conversion between implicated vorticity and relative vorticity is practically required by divergence. From the view of the geostrophic adaptation theory, the nondivergent assumption of Rossby is actually assumed that the process of the geostrophic adaptation is infinitely fast, which does not contradict the concept of physics fluctuation. Finally, the distribution characteristics of divergence in long wave and its physical correlation with long wave velocity are analyzed based on the difference between streamline and trajectory.

Keywords: Rossby waves, geostrophic adaptation, divergence, vorticity

0 引言

《气象科技进展》曾刊登了一篇由美国佛罗里达州立大学地球海洋大气系蔡鸣和中国科学院大气物理研究所虞越越撰写的题为《从牛顿力学来认识罗斯贝波的振动机理及其回复力》的文章^[1]。这篇文章实质上讨论的是罗斯贝长波理论在表面上存在的一个非常明显的“悖论”, 即无辐散的假定与物理学波动概念的矛盾。作者试图通过牛顿力学的方法来为这个“悖论”给出一个合理的解释。在此之前, 该文作者已和美国乔治梅森大学黄渤华在JAS上发表了一篇用牛顿力学重新诠释罗斯贝波的振动和传播机理的论文^[2]。所谓从牛顿力学来认识长波理论, 本质上就是从气块运动的角度来认识罗斯贝波。由于“波”是流场的一种现象, 改为用质点动力学来分析气块的运动, 即用拉格朗日方法来解释罗斯贝波的机理无疑是非常吃力

的一件事。本文试图从欧拉方法的角度, 即从流体力学来理解罗斯贝长波理论中表面上存在的“悖论”, 并加深对罗斯贝波中涡度和散度变化机理的认识。

为此首先介绍罗斯贝长波理论和波的物理本质之间存在“悖论”; 然后再从涡度方程和散度方程分析地转参数随纬度的变化的重要性, 指出罗斯贝长波理论的无辐散假定的本质实际上是假定地转适应过程无限快, 散度一旦产生就立即转化为涡度。这就是罗斯贝长波理论表面上存在“悖论”的本质。

1 罗斯贝长波理论的“悖论”

随意打开一张北半球500 hPa天气图(图1), 对对流层中部最醒目的现象就是环绕极地的西风带和叠加在上面的波动。罗斯贝对涡度方程

$$\frac{d(\zeta + f)}{dt} = \frac{\partial \zeta}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla(\zeta + f) = -(f + \zeta)D, \quad (1)$$

作无辐散假定 $D=0$, 导出了长波移速公式, 并揭示了长波的机理是绝对涡度守恒, 即

$$\zeta_a = \zeta + f = \text{常数}.$$

式中 ζ_a 为绝对涡度, ζ 是相对涡度, 地球自转涡

收稿日期: 2015年6月8日; 修回日期: 2015年8月20日
第一作者: 陶祖钰(1939—), Email: taozuyu@pku.edu.cn
资助信息: 中国气象局预报员专项(CMAYBY2017-092);
国家自然科学基金(41475042)

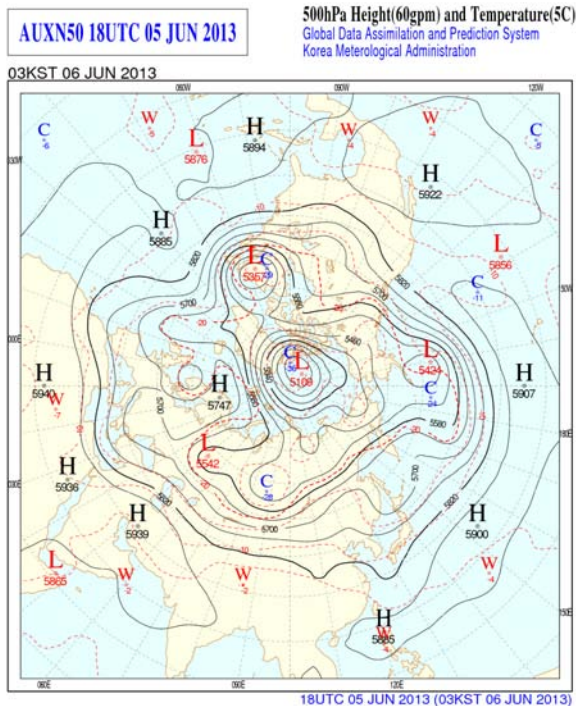


图1 北半球500 hPa高空图上的西风带和波动
Fig. 1 The westerlies and waves at 500 hPa in the northern hemisphere

度 $f = 2\omega \sin \varphi$ 。地球自转的角速度 ω 的数值为 $7.29 \times 10^{-5} \text{ s}^{-1}$, φ 为纬度; 所以, f 随纬度的增加而增加, 极地最大、赤道为0。相对于地球静止的空气块, 因为随地球一起转动, 具有与该纬度相同的地球自转涡度, 所以也称为牵连涡度。地球自转涡度常简称为地转涡度, 为避免和地转风涡度混淆, 本文将采用牵连涡度的称呼。绝对涡度守恒说明, 长波的本质是牵连涡度和相对涡度之间的转换。在地球流体力学中, f 也称为地转参数。地转参数随纬度的变化 ($\partial f / \partial y$) 在大气动力学中称为 β 效应, 是认识长波机理的关键。

500 hPa 等压面由于最接近无辐散层, 其槽脊的移动速度和长波公式的理论速度相当接近。第一个有实用价值的数值预报模式是预报500 hPa等压面形势的一层正压模式。它就是在无辐散的假定下计算500 hPa等压面上相对涡度平流和地球自转涡度平流之间的余项。因此罗斯贝长波理论是近代气象学中具有划时代意义的重大进展。

但是, 长波理论和物理学的波动概念之间存在明显的矛盾。因为从物理学的观点看, 波动是由一个初始振动通过物质的辐合辐散而传播的, 如声波、重力波等。图2是重力波图示, 图中L表示低压扰动中心, H表示高压扰动中心, 图2b比图2a落后1/4周期。可见波动一定和散度相联系, Rossby长波也不能例外, 而

长波理论却是在无辐散的假定下才导出的, 这就是长波的悖论。正因为如此, 有的物理学家认为, 气象学中的罗斯贝波根本就算不上是波。这也是天气学和动力气象学教学过程中常常会发生的一个疑问。

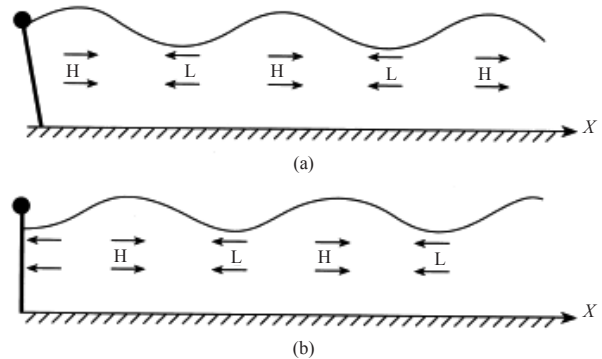


图2 振动与波的传播^[3]
Fig. 2 The propagation of vibrations and waves^[3]

2 牵连涡度和相对涡度是如何相互转换的

2.1 相对涡度的散度制造项

在无辐散假定下, 绝对涡度守恒说明, 长波的形成机理是牵连涡度和相对涡度之间的转换, 因此教科书中常用如图3所示的图来定性解释长波槽脊的形成。当气块由位置①向低纬度移动到位置②时, 牵连涡度变小, 变小的部分转换成气旋式的正相对涡度, 形成槽; 当气块从位置②到位置③时, 情况相反, 牵连涡度增加, 增加的部分则一定来自气块的相对涡度, 所以到位置③, 气块的相对涡度变小, 成为反气旋式的负涡度, 形成脊。图3实际上只是表示一个气块移经长波的槽脊时它的绝对涡度始终是相同的, 并未对相对涡度是怎么减小或增加的做出回答, 也就是说, 图3只是一种对结果的描述, 而不是一个对物理机理的解释。

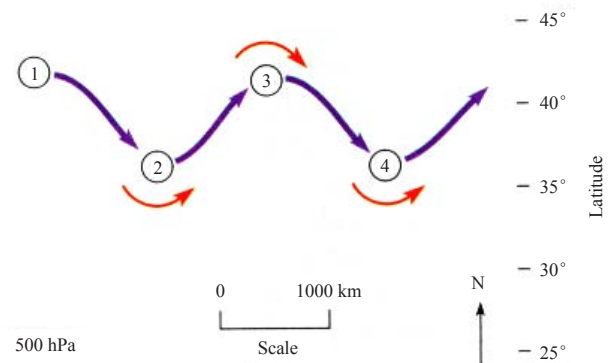


图3 长波绝对涡度守恒示意图^[4]
Fig. 3 The diagram of long wave absolute vorticity conservation^[4]

牵连涡度的大小只取决于气块所在的地理纬度，这是地球自转决定的，比较容易理解。关键的问题是气块从长波脊运动到长波槽，再从长波槽运动到长波脊，气块的相对涡度是怎样从负涡度变为正涡度，再由正涡度变为负涡度的。为此需要将涡度方程写成相对涡度个别变化的形式

$$\frac{d\zeta}{dt} = -fD - v\frac{\partial f}{\partial y}, \quad (2)$$

来考察气块涡度变化的机理。式(2)中右边第一项 $-fD$ 是气块相对涡度的散度制造项，辐散使气块涡度减小，辐合使气块涡度增加。其中地转参数 f 表示地转偏向力的作用(图4)，它使辐散流场转变为反气旋式流场，辐合流场转变为气旋式流场。也就是说，气块由位置①到位置②，相对涡度的增加一定是由辐合造成的。所以从涡度方程看，长波中由脊到槽的转变，一定是和辐合相联系的。

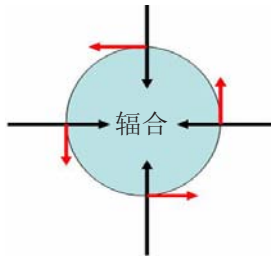


图4 辐合流场(黑色矢量)的地转偏向力(红色矢量)
Fig. 4 The Coriolis force (red vector) in the convergent flow field (black vector)

2.2 牵连涡度平流项和牵连涡度的个别变化

式(2)右边的第二项 $-v(\partial f/\partial y)$ ，是牵连涡度平流项。在Rossby长波理论中它就是牵连涡度和相对涡度之间的转换项，所以认识这一项的物理意义特别重要。牵连涡度是气块与地球固定在一起旋转时所具有的涡度，即气块所具有的所在纬度的地球自转涡度。牵连涡度随纬度的增加而减小，极地的牵连涡度为地球自转角速度的两倍，即 2ω ；赤道上，牵连涡度为0。由于牵连涡度只和纬度有关，所以牵连涡度平流只与气块南北方向的运动，即风速的 v 分量有关，与 u 分量无关。在北半球，如图3中当气块向北运动由位置②到位置③， $v > 0$ ，则牵连涡度平流 $-v(\partial f/\partial y) < 0$ ，使气块的相对涡度减小， $d\zeta/dt < 0$ ；当气块向南运动由位置①到位置②， $v < 0$ ，则牵连涡度平流 $-v(\partial f/\partial y) > 0$ ，使气块的相对涡度增大， $d\zeta/dt > 0$ 。牵连涡度转换为相对涡度的物理过程可以用图5来说明。当流场为均匀的南风时(左)，地转偏向力指向东并向北增大，为反气旋式切变，引起流场反气旋式切变涡度增加。相反，当流场为均匀的北风时

(右)，地转偏向力也向北增大但指向西，故为气旋式切变，引起流场气旋式切变涡度增加。由此可见，地转参数随纬度的变化($\partial f/\partial y$)是牵连涡度向相对涡度转化的根本原因。

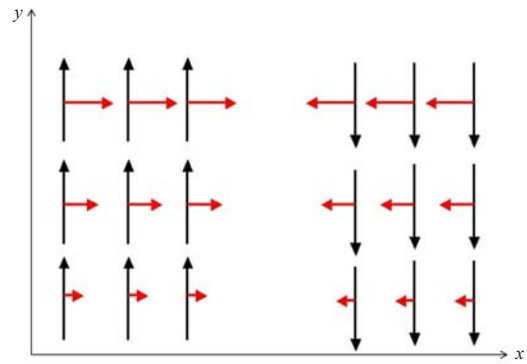


图5 均匀经向运动中地转偏向力(红色矢量)
Fig. 5 The Coriolis force (red vector) in the uniform meridional circulation

从数学上可以证明牵连涡度平流就是气块牵连涡度的个别变化。首先将个别变化的全微分分解成偏微分

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y},$$

由于 f 和时间及经度无关，

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \text{ 和 } \frac{\partial f}{\partial x} = 0,$$

所以

$$\frac{df}{dt} = v\frac{\partial f}{\partial y} = -(-v\frac{\partial f}{\partial y}),$$

即气块牵连涡度的个别变化和牵连涡度平流大小相等，但符号相反。向低纬运动时，气块的牵连涡度减小，而牵连涡度平流 > 0 。将它代入式(2)则有

$$\frac{d\zeta}{dt} = -fD - \frac{df}{dt}, \quad (3)$$

在无辐散 $D=0$ 的假定下，式(3)就变为

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\frac{df}{dt}. \quad (4)$$

所以从数学上看，无辐散假定实际上就是假定气块相对涡度的变化恒等于牵连涡度的变化。换言之，Rossby长波理论中无辐散的假定本质就是气块牵连涡度的变化随时随地立即转化为气块的相对涡度，而不考虑如图4所示的气块相对涡度的变化过程。

从地转适应理论的角度看，长波理论中无辐散的假定实际上就是假定地转适应过程无限快，也就是只考虑地转适应的最后结果，不考虑地转适应的具体过程。所以，长波理论中的无辐散假定并不意味着长波中没有辐合或辐散。如果要考虑地转适应的具体过程，就必须通过散度方程考察地转过程中散度的产生机理，或者如Cai等^[2]用拉格朗日方法通过考察质点振动

的动力学来解释长波的机理。Rossby的历史功绩正是用一个非常简单的方法揭示了绝对涡度守恒是长波的本质，但不能因此而误认为长波真的是无辐散的。下面从长波移速不同于风速这个客观事实出发来讨论长波中所伴随的散度。

3 长波中的散度——槽前辐散和槽后辐合

3.1 流线和轨迹

高空槽前辐散、槽后辐合是众所周知的基本事实，也是在制作天气预报时最常用到的一个基本概念。“槽前辐散、槽后辐合”是否对长波也同样适用？上一节只是从长波中气块相对涡度的个别变化说明必定有散度相伴随，但是并未给出散度的产生机理。本节仍用图3对长波中散度的产生机理做定性的解释。

图3中的气块自始至终沿同一条流线移动，气块的相对涡度在移动过程中发生正负交替的变化。这种情况只有在长波是静止时才成立，因为只有在流场不随时间变化的情况下，流线才代表轨迹。所以严格地讲，图3所表示的是长波移速为0的特殊情况。

长波公式

$$C = U - \frac{\beta L^2}{4\pi^2}, \quad (5)$$

表明，长波的移速 C 总是小于西风的风速 U ，波长越长，移速越慢。北半球中高纬度，长波移速的量级为 10^0 m/s，高空西风的量级是 10^1 m/s。在波长足够长的

情况下，由于长波的移速比西风的速度慢得多，所以把长波近似地看作静止是合理的。

3.2 涡度平流和散度

在定常的情况下，涡度的局地变化 $\partial\zeta/\partial t=0$ 。把代表相对涡度的个别变化的全微分分解为局地变化和平流变化，即

$$\frac{d\zeta}{dt} = \frac{\partial\zeta}{\partial t} - (-V \cdot \nabla\zeta),$$

其中平流变化 $-V \cdot \nabla\zeta = -u \frac{\partial\zeta}{\partial x} - v \frac{\partial\zeta}{\partial y}$ 。由于 $\partial\zeta/\partial t=0$ ，所以

$$\frac{d\zeta}{dt} = -(-V \cdot \nabla\zeta), \quad (6)$$

即涡度的个别变化和涡度平流大小相等、符号相反。由此可见，在定常的情况下，涡度平流引起的流场变化和气块涡度的个别变化是相互抵消的，例如正涡度平流引起的局地涡度增加一定被气块涡度的减小所抵消。

在上一节涡度方程的讨论中我们已经知道气块涡度的个别变化一定与散度相联系，例如如图4所示，辐合使气块涡度增加。在图3中，气块由脊移到槽（从位置①移到位置②），与槽后的负涡度平流相配合。如图6所示，负涡度平流所引起的局地涡度减小，在地转偏向力的作用下引起辐合；而辐合导致气块涡度增加，将抵消负涡度平流，最终使局地涡度保持不变，使长波呈定常状态。

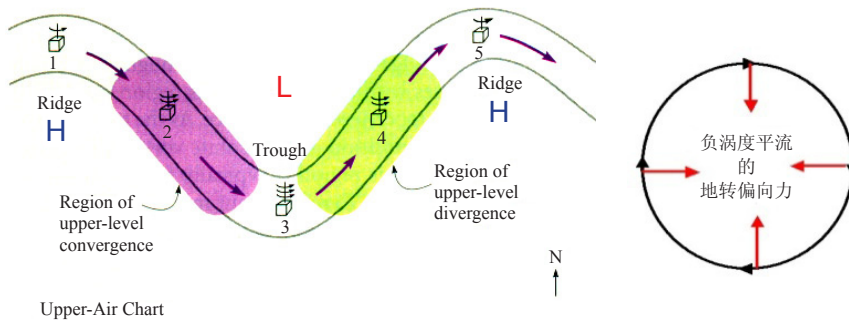


图6 负涡度平流引起辐合的示意图^[4]

(黑色圆形矢线为负涡度平流引起的反气旋环流，红色矢量为地转偏向力)

Fig. 6 The diagram of the convergence caused by negative vorticity advection^[4]

(Black circular line is anti cyclonic circulation caused by negative vorticity advection, red vector is the Coriolis force)

一般情况下，长波波速不等于0，波长越短、波速越快，波长越长、波速越慢。其机理如图7所示，涡度平流使长波前进，即槽脊的移动方向和基本气流相同；地球自转涡度平流使长波后退，即槽脊的移动方向和基本气流相反。波长越长，涡度平流越小，地球自转涡度平流的相对贡献越大，故移速越慢。当

波长足够长时，长波移速接近0，甚至后退（即向西移）。也就是说，在移动的长波中，涡度的局地变化不等于0是因为涡度平流和地球自转涡度平流没有相互抵消。

从上面的讨论可知，只要局地涡度变化不等于涡度平流，即波动的移速与西风带的风速不同，就表明

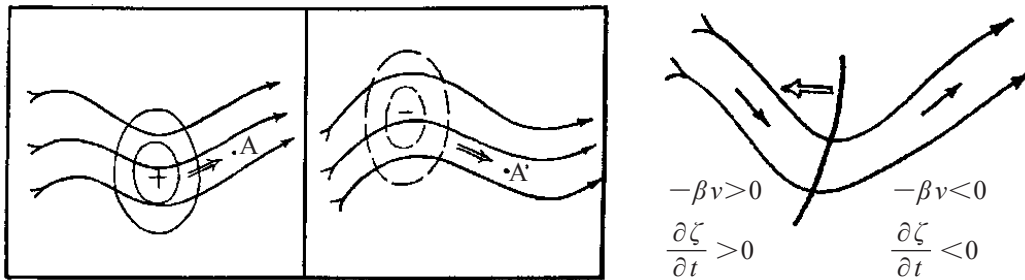


图7 涡度平流和地球自转涡度平流与长波移动关系示意图

Fig. 7 The diagram of the relationship among the vorticity advection, the planetary vorticity advection and long wave migration

存在气块涡度的个别变化，因此就一定存在散度。长波公式表述的就是波速和风速的差异。因此，长波和一切波动相同，必定和辐合辐散联系在一起。无辐散假定是为了推导长波波速公式时采取的一种数学处理方法。故不能因此就认为长波真的是无辐散的，这也不符合客观事实，即槽前有上升运动，槽后有下沉运动。

散度是波动传播的必要条件。在大尺度动力学准地转理论中，散度的作用是使地转平衡得以恢复（即地转适应）。故也可在物理上将长波理论在无辐散假定下得到的长波公式看作是地转适应的最后结果，而不去讨论长波在移动中发生的具体的地转适应过程。如陈国森等^[6]所述，“Rossby长波理论是建立在地转适应理论基础上的”。因此，将Rossby长波称为不可压缩的正压波是不恰当的、值得讨论的，因为它没有反映长波真实的物理本质。

长波作为一种色散波，也存在群速度，即波动能量的频散现象，在天气图上表现为上游效应，即上游槽或脊的发展引起下游脊或槽的快速发展，是认识高空环流形势变化的基本理论依据。例如东亚寒潮过程乌拉尔山阻塞高压的建立和崩溃与东亚大槽加深

之间的密切关联就是典型的长波频散现象。所以长波不仅有从小到大的发展过程，而且长波槽脊的发展常常是非常剧烈的。这种发展过程都伴随有明显的冷暖平流，即每一个槽或脊的发展过程，都是一次典型的斜压发展过程。因此，如何看待长波频散和斜压发展的关系，乃至如何看待与之相关联的有效位能和扰动动能的传播，包括其中必然存在的两种能量的相互转换，是需要进一步讨论的问题，将在今后专门就长波频散及其相关联的能量转化问题进行讨论。

参考文献

- [1] 蔡鸣, 虞越越. 从牛顿力学认识罗斯贝波的震荡机理及其回复力. 气象科技进展, 2013, 3(5):6-11.
- [2] Cai M, Huang B. A new look at the physics of Rossby waves: a mechanical-coriolis oscillation. J Atmos Sci, 2013, 70: 303-316.
- [3] Holton J R. An Introduction to Dynamic Meteorology(4rd ed). Academic Press INC, 2004.
- [4] Ahrens C D. Meteorology Today: An Introduction to Weather, Climate, and the Environment (6th ed). Brooke/Cole, Thomson Learning, 1999.
- [5] 北京大学地球物理系气象教研室. 天气分析和预报. 北京: 科学出版社, 1976: 81-82.
- [6] 陈国森, 王林, 陈文, 等. 大气Rossby长波理论的建立和发展. 气象科技进展, 2012, 2(6): 50-54.